Activité 1 - Formule de Cardan - Approche historique

Exercice 1.

$$x^3 = 18x + 35$$

$p = 18 \quad q = 35$

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{35}{2}\right)^2 - \left(\frac{18}{3}\right)^3 = \frac{361}{4} > 0$$

$= 90{,}25$

donc on sait que une solution de l'équation est

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{35}{2} + \sqrt{\frac{361}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{35}{2} - \sqrt{\frac{361}{4}}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{35}{2} + \frac{19}{2}} + \sqrt[3]{\frac{35}{2} - \frac{19}{2}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{54}{2}} + \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = \sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{8}$$

$$= 3 + 2 = 5$$

une solution de l'équation est 5

Exercice 2

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^3 = \frac{(3+\sqrt{5})^3}{8} = \frac{3^3 + 3 \times 9 \times \sqrt{5} + 3 \times 3 \times 5 + 5\sqrt{5}}{8}$$

$$= \frac{27 + 27\sqrt{5} + 45 + 5\sqrt{5}}{8}$$

1 1
1 2 1
1 3 3 1

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$= \frac{72 + 32\sqrt{5}}{8}$$

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^3 = 9 + 4\sqrt{5}$$

$$\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^3 = \frac{27 - 3\times 9\sqrt{5} + 3\times 3\cancel{2}5 - 5\sqrt{5}}{8}$$

$$= \frac{27 - 27\sqrt{5} + \overset{45}{\cancel{8}} - 5\sqrt{5}}{8}$$

$$= \cancel{22\sqrt{}} \; \frac{72 - 32\sqrt{5}}{8} = 9 - 4\sqrt{5}$$

$x^3 = 3x + 18$

$p = 3 \qquad q = 18.$

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 9^2 - 1 = \cancel{8 \to 0} \; 81 - 1 = 80$$

une solution de l'équation est

$$\sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}} = \sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}}$$

$$= \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{6}{2} = 3.$$

Exercice 3 $\quad p = 15 \quad q = 4$

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 2^2 - 5^3 = 4 - 125 = -121 < 0$$

on ne peux pas trouver une solution par la formule de Cardan.

en utilisant les tables de valeur de la calculatrice on trouve une racine positive $x = 4$.

II Découverte de Bombelli.

$x^3 = 15x + 14 \qquad p = 15 \quad q = 4 \qquad \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = -121$

exercice 4

$$\begin{aligned}(2+\sqrt{-1})^3 &= 8 + 3\times 2^2\sqrt{-1} + 3\times(-1)\times 2 \cancel{+} -1\sqrt{-1} \\ &= 8 + 12\sqrt{-1} \cancel{+} -6 - \sqrt{-1} \\ &= 2 + 11\sqrt{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2-\sqrt{-1})^3 &= 8 - 3\times 2^2\sqrt{-1} + 3\times 2\times(-1) + \sqrt{-1} \\ &= 2 - 11\sqrt{-1}\end{aligned}$$

La solution donnée par la formule de Cardan est

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} &= \sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}} \\ &= 2+\sqrt{-1} + 2-\sqrt{-1} \\ &= 4\end{aligned}$$

III exercice 5.

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)\times(-1)}=\sqrt{1}=1\\ \text{or } \left(\sqrt{-1}\right)^2=-1\end{array}\right\}$$ absurde notation incorrecte

$\cancel{\sqrt{-1}=i}$ $\qquad i^2=-1$

Terminales S : **Les nombres imaginaires, approche historique**

1525. Formule de Cardan

Pour une équation de la forme : $x^3 = px + q$ avec $p > 0$ et $q > 0$, si $\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 \geq 0$

alors : le réel $\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$ est solution de l'équation.

Exercice n°1 : Trouver une solution de l'équation $x^3 = 18x + 35$.

Exercice n°2 :

- Calculer $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^3$ et $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^3$.
- Trouver alors une solution de l'équation $x^3 = 3x + 18$.

Exercice n°3 : Pour l'équation $x^3 = 15x + 4$,

- Calculer $\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3$

  Peut-on résoudre l'équation par la formule de Cardan ?
- Trouver, par tâtonnement, une racine positive de cette équation.

1572. Découverte de Bombelli

Pour résoudre l'équation $x^3 = 15x + 4$ par la formule de Cardan, Bombelli transgresse **l'interdit** en utilisant le nombre imaginaire $\sqrt{-1}$ tel que $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$.

Exercice n°4 :

- Calculer $\left(2+\sqrt{-1}\right)^3$ et $\left(2-\sqrt{-1}\right)^3$.
- En déduire la solution de $x^3 = 15x + 4$, donnée par la formule de Cardan.

1777. Invention de i par Euler

Exercice n°5 :

- Effectuer le produit $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1}$ de deux façons différentes.
- En déduire une absurdité.

Pour pallier cet inconvénient, Euler propose de remplacer les symboles $\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$ par les nombres imaginaires i et – i tels que $i^2 = -1$ et $(-i)^2 = -1$.