Correction de l'exercice 64 page 31

f est définie sur $\mathbb{R} - \{-6\,;-1\}$ par $f(x) = \dfrac{3x^2+16x-12}{x^2+7x+6}$

a) <u>Etude de la limite en $+\infty$ et $-\infty$</u>

f est une fonction rationnelle donc

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} 3 = 3 \qquad \boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3}$$

de même $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3}$

<u>Remarque</u> : de ces deux limites on déduit que la droite d'équation $y = 3$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) <u>limite en -1</u> :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1} (3x^2+16x-12) = -25 \\ \lim\limits_{x \to -1} (x^2+7x+6) = 0 \end{array}\right\} \text{pour la limite du quotient le signe est important pour 0.}$$

x	$-\infty$		-6		-1		$+\infty$
x^2+7x+6		$+$	0	$-$	0	$+$	

donc

$\lim\limits_{x \to -1^-} (x^2+7x+6) = 0^-$ et par quotient $\boxed{\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty}$

$\lim\limits_{x \to -1^+} (x^2+7x+6) = 0^+$ et par quotient $\boxed{\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty}$

<u>Remarque</u> : On déduit de ces limites que la droite verticale d'équation $x = -1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$

Limite en -6 : -6 est une racine du numérateur et du dénominateur

On arrive sur une forme indéterminée du type "$\frac{0}{0}$"

Pour lever l'indétermination, on factorise

Recherche de l'autre racine de $3x^2+16x-12$

1ere méthode $\Delta = 400$

$x_1 = -6 \quad x_2 = \frac{2}{3}$

Factorisation

$3x^2+16x-12 = 3(x+6)\left(x-\frac{2}{3}\right)$

produit $-12 = 3x_1x_2$

$-12 = 3\times(-6)\times x_2$

$x_2 = \frac{-12}{-18} = \frac{2}{3}$

donc $$\frac{3x^2+16x-12}{x^2+7x+6} = \frac{3(x+6)\left(x-\frac{2}{3}\right)}{(x+6)(x+1)} = \frac{3\left(x-\frac{2}{3}\right)}{x+1}$$

donc $$\lim_{x\to-6} f(x) = \lim_{x\to-6}\frac{3x-2}{x+1} = \frac{3\times(-6)-2}{-6+1} = \frac{-20}{-5} = 4$$

donc $$\boxed{\lim_{x\to 6} f(x) = 4}$$

Remarque : ici il n'y a pas d'asymptote en -6 ... mais "un point d'accumulation"