Exercice 2 :

propriété à prouver $\boxed{1 \leqslant u_n \leqslant 3}$

1) a) Au rang initial

$u_0 = 1$ donc $\boxed{1 \leqslant u_0 \leqslant 3}$

Hérédité on suppose que $\boxed{1 \leqslant u_p \leqslant 3}$

$6 \leqslant u_p + 5 \leqslant 8$

$\sqrt{6} \leqslant \sqrt{u_p+5} \leqslant \sqrt{8}$

donc $1 \leqslant \sqrt{6} \leqslant u_{p+1} \leqslant \sqrt{8} \leqslant 3$

on a $\boxed{1 \leqslant u_{p+1} \leqslant 3}$

donc la propriété est vraie pour $n = 0$
et héréditaire donc par récurrence
pour tout $n \in \mathbb{N}$ $1 \leqslant u_n \leqslant 3$
(u_n) est bornée par 1 et 3

b) Au rang initial $u_0 = 1$ $u_1 = \sqrt{6}$

propriété à prouver $\boxed{u_n < u_{n+1}}$

$1 < \sqrt{6}$ donc $\boxed{u_0 < u_1}$

hérédité On suppose que $\boxed{u_p < u_{p+1}}$

$u_p + 5 < u_{p+1} + 5$

$\sqrt{u_p+5} < \sqrt{u_{p+1}+5}$ $\sqrt{\ }$ est croissante sur

alors $\boxed{u_{p+1} < u_{p+2}}$

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$
et héréditaire donc par récurrence
pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\boxed{u_n < u_{n+1}}$
La suite (u_n) est strictement croissante.

2) $\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \sqrt{5+v_n} \end{cases}$

propriété à prouver $2 \leqslant v_n \leqslant 4$

a) <u>au rang initial</u> $v_0 = 4$

$\boxed{2 \leqslant v_0 \leqslant 4}$

<u>hérédité</u> : On suppose que $\boxed{2 \leqslant v_p \leqslant 4}$

$7 \leqslant 5 + v_p \leqslant 9$

$\sqrt{7} \leqslant \sqrt{5+v_p} \leqslant \sqrt{9}$

$2 \leqslant \sqrt{7} \leqslant \sqrt{5+v_p} \leqslant \sqrt{9} \leqslant 4$

on a alors $\boxed{2 \leqslant v_{p+1} \leqslant 4}$

donc la propriété est vraie pour $n = 0$
et héréditaire donc par récurrence
pour tout n de $\mathbb{N}$ $2 \leqslant v_n \leqslant 4$
<u>la suite (v_n) est bornée par 2 et 4</u>

b) propriété à prouver : $\boxed{v_n > v_{n+1}}$

<u>au rang initial</u> $v_0 = 4$ $v_1 = \sqrt{5+4} = 3$

$\boxed{v_0 > v_1}$

<u>hérédité</u> : On suppose que $\boxed{v_p > v_{p+1}}$

$5 + v_p > 5 + v_{p+1}$

$\sqrt{5+v_p} > \sqrt{5+v_{p+1}}$

On a alors $\boxed{v_{p+1} > v_{p+2}}$

donc la propriété est vraie pour $n=0$
et héréditaire donc par récurrence
pour tout n de $\mathbb{N}$ $v_{n+1} > v_n$
<u>La suite v_n est donc decroissante</u>