Corrigé de l'exercice

1) f est une fonction rationnelle, dérivable sur son ensemble de définition $]-1\,;+\infty[$

$$f'(x) = \frac{(2ax+b)(x+1) - (ax^2+bx+c)\times 1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2ax^2+bx+2ax+b-ax^2-bx-c}{(x+1)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{ax^2+2ax+b-c}{(x+1)^2}}$$

2) le point A (0 ; 4) $\in$ (C) $\Leftrightarrow$ $\boxed{f(0)=4}$

Le point B (1 ; 1,5) $\in$ (C) $\Leftrightarrow$ $\boxed{f(1)=1{,}5}$

Le coefficient directeur de la tangente en A correspond à f '(0) donc

$$f'(0) = \frac{yC-yA}{xC-xA} = \frac{-2-4}{1-0} = -6 \qquad \boxed{f'(0) = -6}$$

Le coefficient directeur de la tangente en B correspond à f '(1) donc

$$f'(1) = \frac{yD-yB}{xD-xB} = \frac{-1{,}5-1{,}5}{5-1} = -\frac{3}{4} \qquad \boxed{f'(1) = -\frac{3}{4}}$$

3) $f(0)=4 \Leftrightarrow c=4$

$$f(1)=1,5 \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{2} = 1,5 \Leftrightarrow a+b+c=3$$

$$f'(0) = -6 \Leftrightarrow b - c = -6$$

$$f'(1) = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{a+2a+b-c}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 3a + b - c = -3$$

Donc les réels a,b et c doivent être solutions du système $\begin{cases} c=4 \\ a+b+c=3 \\ b-c=-6 \\ 3a+b-c=-3 \end{cases}$

D'où $c=4$; $b = -6+c = -2$; $a -2+4=3 \Leftrightarrow a=1$
On vérifie dans la quatrième équation : $3 \times 1 - 2 - 4 = -3$

On en déduit $a=1$; $b = -2$ et $c = 4$

et $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x+1}$