ex 18 page 184 - Corrigé.

Demonstration par récurrence de la propriete
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

au rang initial : $\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1$

$\frac{1\times(1+1)\times(2+1)}{6} = \frac{2\times 3}{6} = 1$ donc $\sum_{i=1}^{1} i^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$

hérédité :

On suppose que la propriete est vraie au rang p
$$\sum_{i=1}^{p} i^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{p+1} i^2 = \sum_{i=1}^{p} i^2 + (p+1)^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} + (p+1)^2$$
$$= \frac{p(p+1)(2p+1) + 6(p+1)^2}{6} = \frac{(p+1)\left(p(2p+1)+6(p+1)\right)}{6}$$
$$\sum_{i=1}^{p+1} i^2 = \frac{(p+1)(2p^2+7p+6)}{6}$$

or $\frac{(p+1)((p+1)+1)(2(p+1)+1)}{6} = \frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6} = \frac{(p+1)(2p^2+7p+6)}{6}$

en identifiant les 2 expression a a bien $\sum_{i=1}^{p+1} i^2 = \frac{(p+1)((p+1)+1)(2(p+1)+1)}{6}$

donc la propriete est vraie au rang (p+1)

Conclusion - Au rang initial $\sum_{i=1}^{1} i^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$

- Si $\sum_{i=1}^{p} i^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$ alors $\sum_{i=1}^{p+1} i^2 = \frac{p((p+1)+1)(2(p+1)+1)}{6}$

par récurrence pour tout $n \geqslant 1$ $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.