Correction des exercices sur les calculs de primitives.

Activite 1 page 230.

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x-1}}$ sur $I = \left]\dfrac{1}{3} ; +\infty\right[$

on reconnait une règle de dérivation du type :

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

si on considère la fonction G définie sur $\left]\dfrac{1}{3} ; +\infty\right[$
par $G(x) = \sqrt{3x-1}$ sa derivée est

$$G'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$$

donc pour $F(x) = \dfrac{2}{3} \times \sqrt{3x-1}$ on a $F'(x) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{2\sqrt{3x-1}}$

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-1}} = f(x)$$

donc F est une primitive de f sur I
on en déduit

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Les primitives de } f \text{ sur } I \text{ sont toutes} \\ \text{les fonctions définies sur } I \text{ par :} \\ F(x) = \dfrac{2}{3}\sqrt{3x-1} + C, \quad C \in \mathbb{R}\end{array}}$$

d) $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$

On reconnait une règle de dérivation du type

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$$

pour $G(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ on a $G'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

donc pour

$F(x) = -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{x^2+1}$ on a $F'(x) = \left(-\dfrac{1}{2}\right) \times \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

$$F'(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2} = f(x)$$

donc les primitives de f sur $\mathbb{R}$
sont toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$
par $F(x) = -\dfrac{1}{2(x^2+1)} + C$, $C \in \mathbb{R}$

e) $f(x) = \sin x \cos^3 x$ sur $\mathbb{R}$

On reconnait une règle de dérivation du type

$$(u^n)' = n\, u' u^{n-1}$$

pour $G(x) = \cos^4 x$ on a $G'(x) = 4 \times (-\sin x) \cos^3 x$
donc pour

$F(x) = -\dfrac{1}{4} \cos^4 x$ on a $F'(x) = -\dfrac{1}{4} \times 4 \times (-\sin x) \cos^3 x$

$$F'(x) = \sin x \cos^3 x = f(x)$$

Donc les primitives de f sur $\mathbb{R}$
sont toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$
par $F(x) = -\dfrac{1}{4} \cos^4 x + C$, $C \in \mathbb{R}$.