Exercice 62

$$Z = \frac{z+i}{i\bar{z}+3} \quad \text{pour } z \neq -3i$$

on pose $z = x+iy$

$$Z = \frac{x+iy+i}{i(x-iy)+3}$$

$$Z = \frac{x+(y+1)i}{(y+3)+ix} = \frac{(x+(y+1)i)((y+3)-xi)}{(y+3)^2+x^2}$$

$$Z = \frac{x(y+3)+x(y+1)}{x^2+(y+3)^2} + \frac{-x^2i+(y+1)(y+3)i}{x^2+(y+3)^2}$$

$$Z = \frac{2xy+4x}{x^2+(y+3)^2} + \frac{y^2-x^2+4y+3}{x^2+(y+3)^2}\, i$$

Z imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}(Z)=0$ et $z \neq -3i$

$\Leftrightarrow$ $2xy+4x=0$ et $(x,y)\neq(0,-3)$

$2x(y+2)=0$

$2x=0$ ou $y+2=0$

$x=0$ ou $y=-2$

L'ensemble cherché est la réunion de deux droites : - la droite d'équation $x=0$, donc l'axe des imaginaires purs privé du point d'affixe $-3i$

et - la droite horizontale d'équation $y=-2$.

Exercice 63 page 284

$(1+z)(i+\bar{z})$ on pose $z = x+iy$

$\bar{z} = x - iy$

$$(1+z)(i+\bar{z}) = (1+x+iy)(i+x-iy)$$

$$= ((1+x)+iy)(x+(1-y)i)$$

$$(1+z)(i+\bar{z}) = x(1+x) - y(1-y) + ((1+x)(1-y)+xy)i$$

$$(1+z)(i+\bar{z}) = (x^2+x+y^2-y) + (1+x-y-xy+xy)i$$

$$(1+z)(i+\bar{z}) = (x^2+x+y^2-y) + (1+x-y)i$$

a) pour que ce nombre soit réel on doit avoir

$1+x-y = 0$

$y = 1+x$

L'ensemble des points M cherchés est alors la droite d'équation $y = 1+x$ dans le plan complexe

b) pour que ce nombre soit imaginaire pur. on doit avoir $x^2+x+y^2-y = 0$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = 0$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

L'ensemble des points M cherchés est alors le cercle de centre Ω d'affixe $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$