

Chapitre 5 : NOMBRES COMPLEXES (première partie)

Introduction : les ensembles de nombres , apparus lors de résolutions d'équations.

- \mathbb{N} est l'ensemble des entiers naturels. C'est l'ensemble des entiers positifs ou nuls.
Dans \mathbb{N} l'équation $x + 1 = 0$ n'a pas de solution.
Cette équation a une solution notée -1 , cette solution est un élément de l'ensemble \mathbb{Z} .
- \mathbb{Z} est l'ensemble des entiers relatifs. C'est l'ensemble des entiers positifs, négatifs ou nuls.
 \mathbb{Z} contient \mathbb{N} , c'est-à-dire que \mathbb{N} est contenu dans \mathbb{Z} , ce que l'on note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
Dans \mathbb{Z} l'équation $2x = 1$ n'a pas de solution.
Cette équation a une solution notée $\frac{1}{2}$, cette solution est un élément de l'ensemble \mathbb{Q} .
- \mathbb{Q} est l'ensemble des nombre rationnels.
C'est l'ensemble de tous les nombres de la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$.
 \mathbb{Q} contient \mathbb{Z} . On a donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
Dans \mathbb{Q} l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solutions.
Cette équation a deux solutions notées $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$, ces solutions sont des éléments de l'ensemble \mathbb{R} .
- \mathbb{R} est l'ensemble des nombre réels. C'est l'ensemble des abscisses de tous les points d'une droite.
 \mathbb{R} contient \mathbb{Q} . On a donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
Dans \mathbb{R} l'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solutions.
Cette équation a deux solutions notées i et $-i$, ces solutions sont des éléments de l'ensemble \mathbb{C} .
- \mathbb{C} est l'ensemble des nombre complexes.
C'est l'ensemble des nombres de la forme $a + bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
 \mathbb{C} contient \mathbb{R} . On a donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

D) FORME ALGEBRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Définition :

L'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes est l'ensemble qui :

- contient tous les nombres réels
- est muni d'une addition et d'une multiplication et, pour ces opérations, les règles de calcul sont les mêmes que les règles de calcul sur les nombres réels.
- contient un nombre i tel que $i^2 = -1$

Chaque nombre complexe s'écrit de manière unique sous la forme $z = x + iy$ (x et $y \in \mathbb{R}$).

$z = x + iy$ est la forme algébrique du nombre complexe z .

x s'appelle la partie réelle de z , $x = \text{Re}(z)$.

y s'appelle la partie imaginaire de z , $y = \text{Im}(z)$.

Exemple:

$$z = \sqrt{3} + 4i \in \mathbb{C}$$

$$\text{Re}(z) = \sqrt{3}$$

$$\text{Im}(z) = 4$$

Remarque :

si $\text{Im}(z) = 0$ alors z est un réel

si $\text{Re}(z) = 0$ alors z s'appelle un imaginaire pur

Attention : la partie imaginaire est un nombre réel

Propriété

2 nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

$$z = x + iy \quad \text{et} \quad z' = x' + iy'$$

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

II) REPRESENTATION GRAPHIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

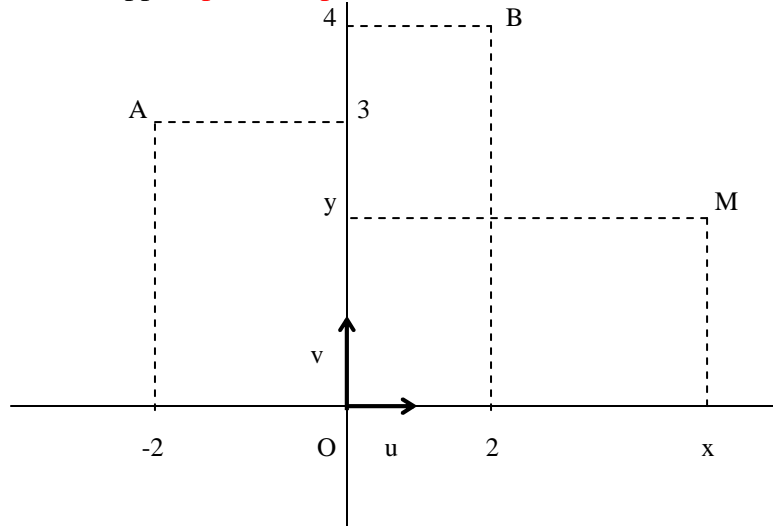
Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Soit $M(x; y)$.

Le complexe $z = x + iy$ s'appelle l'affiche du point M dans le plan .

Le point M s'appelle l'image du complexe z dans $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Le plan est alors appelé plan complexe.



Exemples :

Le point $A(-2; 3)$ a pour affiche $z = -2 + 3i$.

L'image de $z = 2 + 4i$ est $B(2; 4)$.

Remarque :

L'axe des abscisses représente l'ensemble des nombres réels.

L'axe des ordonnées représente l'ensemble des nombres imaginaires purs.

Exercices de base : 24, 25, 26, 27 et 30 page 282.

III) OPERATIONS SUR LES NOMBRES COMPLEXES

1) ADDITION ET MULTIPLICATION DANS \mathbb{C}

L'addition et la multiplication de nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul restent les mêmes. Les identités remarquables valables dans \mathbb{R} se prolongent dans \mathbb{C}

Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

Alors :

$$z + z' = (x + x') + i(y + y')$$

$$z \times z' = (xx' - yy') + i(x'y + xy') \quad (\text{inutile d'apprendre la formule, il suffit de refaire le calcul})$$

Exemple: $z = 2 + 3i$ $z' = -5 + 7i$

$$z + z' = -3 + 10i$$

$$z z' = (2 + 3i)(-5 + 7i) = -10 + 14i - 15i - 21 = -31 - i$$

Remarque :

$$k z = kx + iky \quad \text{pour } k \in \mathbb{R}.$$

$$(-1) \times z = -z \quad : \text{ opposé de } z$$

EXERCICES 32 , 33, 34 ,35 PAGE 282

2) INVERSE ET QUOTIENT

propriété

Tout nombre complexe $z \neq 0$ admet un inverse z' noté $\frac{1}{z}$ ($z z' = 1$).

$$z = x + iy \quad \text{et} \quad z' = x' + iy'$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$$\text{Donc} \quad x' = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad y' = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

En pratique:

$$\frac{1}{2-i} = \frac{2+i}{(2-i)(2+i)} = \frac{2}{5} + \frac{i}{5}$$

L'inverse de $2 - i$ est $\frac{2}{5} + \frac{i}{5}$.

Quotient de deux nombres complexes

$$\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'} \quad \text{pour } z' \neq 0.$$

En pratique :

$$\frac{3+4i}{5-2i} = \frac{(3+4i)(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)} = \frac{7+26i}{29} = \frac{7}{29} + \frac{26}{29}i$$

Exercices 38,39,40 page 283

Exercice 42 page 284 avec des questions supplémentaires, déterminer les ensembles de points tels que Z soit un réel, Z soit un imaginaire pur.