Exercice sur la fonction tangente.

$f(x) = 4x - \tan^2 x$

1) f est derivable sur $[0; \frac{\pi}{2}[$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = 4 - 2(1 + \tan^2 x)\tan x$
$= 4 - 2\tan x - 2\tan^3 x$

$2(1-t)(t^2+t+2) = 2(t^2+t+2-t^3-t^2-2t)$
$= 2(-t^3-t+2)$
$= 4 - 2t - 2t^3$

donc si on pose $t = \tan x$
on a bien $f'(x) = 2(1-t)(t^2+t+2)$

2) Etude du signe de $f'(x)$

$1-t > 0 \iff -t > -1 \iff t < 1 \iff t \in [0; \frac{\pi}{4}[$
$1-t = 0 \iff t = 1 \iff t = \frac{\pi}{4}$
$1-t < 0 \iff t \in]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[$

Pour le trinôme t^2+t+2
$\Delta = 1 - 4 \times 2 = 1 - 8 = -7 \quad \Delta < 0$
donc le trinôme n'admet pas de racine, il est toujours positif strictement
donc $f'(x)$ est du signe de $1-t$

$f(0) = 0 \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$ donc $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (-\tan^2 x) = -\infty$

d'où $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = -\infty$